Cálculo Numérico

Faculdade de Engenharia, Arquiteturas e Urbanismo – FEAU

Prof. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

VI – Integração Numérica

Objetivos: O objetivo desta aula é apresentar o método de integração numérica baseado nas fórmulas de Newton-Cotes onde aproximamos a função que se quer integrar por um polinômio cuja integração é trivial. Veremos aqui duas metodologias para cálculo de integras utilizando máquinas digitais: a regra do Trapézio e a regra 1/3 de Simpson (e suas formas repetidas que minimizam bastante o erro do procedimento).

1. Introdução

Sabemos do Cálculo Diferencial e Integral que se f(x) é função contínua em [a, b], então esta função tem uma primitiva neste intervalo, ou seja, existe F(x) tal que $F'(x) = f(x)$. Assim $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, no entanto, pode não ser fácil expressar esta função primitiva por meio de combinações finitas de funções elementares, como, por exemplo, a função $f(x) = e^{-x^2}$, cuja primitiva F(x) que se anula para x = 0 é chamada função de Gauss.

Existe ainda o caso em que o valor de f(x) é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo [a, b]. Como não conhecemos a expressão analítica de f(x), não temos condição de calcular $\int_a^b f(x)\,dx$.

Uma forma de se obter uma aproximação para a integral de f(x) num intervalo [a,b], como nos casos acima, é através dos métodos numéricos que estudaremos nessa aula. A idéia básica desses métodos de integração numérica é a substituição da função f(x) por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo [a,b]. Assim o problema fica resolvido pela integração de **polinômios**, o que é trivial de se fazer. Com esse raciocínio podemos deduzir fórmulas para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nessa aula, as formulas que deduziremos terão a expressão abaixo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n), \quad x_i \in [a, b], \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Formulas desse tipo são chamadas de fórmulas de Newton-Cotes fehcadas:

2. Fórmulas de Newton-Cotes

Nas fórmulas de Newton-Cotes a idéia de polinômio que aproxime f(x) razoavelmente é que este polinômio interpole f(x) em pontos de [a, b] igualmente espaçados. Consideremos a partição do intervalo [a, b] em subintervalos, de comprimento h, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Assim $x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/n$.

As *fórmulas fechadas de Newton-Cotes* são fórmulas de integração do tipo

$x_0 = a$, $x_n = b$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

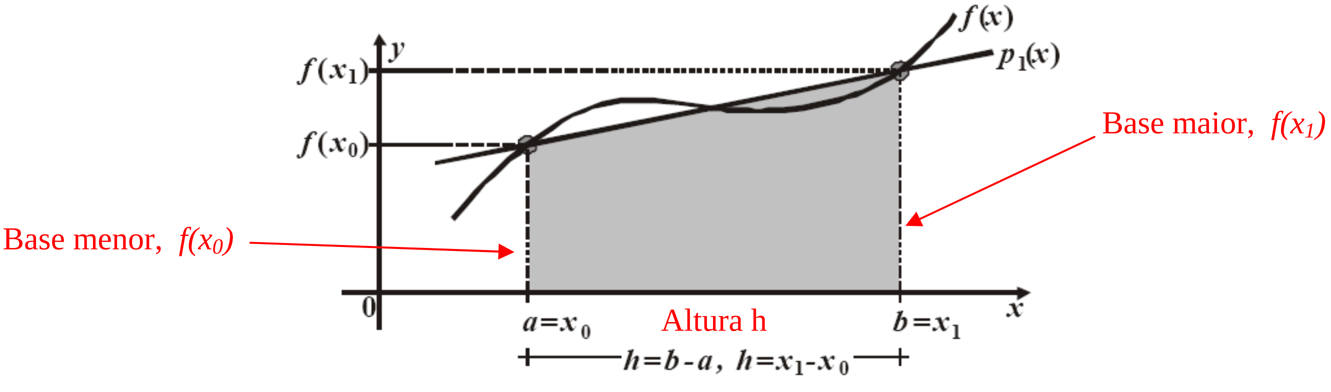
sendo os coeficientes A_i determinados de acordo com o grau do polinômio aproximador.

Desenvolveremos a seguir algumas das fórmulas fechadas de Newton-Cotes, a saber, a regra dos Trapézios e a regra 1/3 de Simpson.

Existem ainda as *fórmulas abertas de Newton-Cotes*, construídas de maneira análoga às fechadas, com x_0 e $x_n \in (a, b)$.

2.1 Regra do Trapézio

A idéia da regra do trapézio é aproximar a função f(x) por um polinômio de ordem 1 (reta). Veremos que, nessa aproximação a integral da função f(x) pode ser aproximada pela área de 1 trapézio.



Se usarmos a formula de **Lagrange** para expressar o **polinômio interpolador de ordem 1, $p_1(x)$,** que interpola f(x) nos pontos x_0 e x_1, teremos o seguinte:

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \qquad \text{com } L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ e } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \text{ logo:}$$

Fazendo $h = (x_1 - x_0)/n$, onde nesse caso $n=1$ (n é o número de subdivisões do intervalo $[x_1, x_0]$) e substituindo os fatores de Lagrange no polinômio podemos reescrevê-lo assim:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_1)$$

Pela nossa aproximação, temos então que integral da função f(x) será escrita por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{h} f(x_1) \right] dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Dessa forma a integral de f(x) no intervalo [a,b] pode ser aproximada pela área de um trapézio de base menor $f(x_0)$, base maior $f(x_1)$ e altura h.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = I_T}$$

Estimativa para o erro da regra do trapézio.

$$\boxed{|E_T| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|} \quad \textbf{ou} \quad \boxed{|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

Exemplo 1) Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x^2} dx$ utilizando a regra dos trapézios

2) Calcular uma estimativa para o erro utilizando essa técnica numérica.

Resolução: Utilizando a Equação de I_T O polinômio de grau 1 (m=1) que passa pelos pontos com abscissas $a = x_0 = 1$ e $b = x_1 = 7$, assim, $h = (7-1)/1 = 6$, logo temos:

$$I_T = \frac{6}{2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{7^2}\right) = 3.0612245$$

Calculando a estimativa para o erro, teremos: $|E_T| \leq \frac{6^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Como a derivada segunda de $f(x)$ é $f''(x) = 6x^{-4}$ $\longrightarrow$

x	|f''(x)|
1	6
2	0.375
3	0.074074
4	0.023438
5	0.0096
6	0.00463
7	0.002499

logo

$$|E_T| \leq \frac{6^3}{12} \times 6 = 108$$ Erro muito grande!!

Exemplo 2 Calcular $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\, dx$, usando a regra dos trapézios. Qual seria uma estimativa para o erro deste procedimento?

Solução:
Nesse caso temos $x_0=1$ e $x_1=9$, portanto $h= (9-1)/1=8$

Então a integral aproximada pelo método do trapézio será: $I_T = \frac{8}{2}\left(\sqrt{6\times 1-5}+\sqrt{6\times 9-5}\right)=32$

Calculando a estimativa para o erro, teremos: $|E_T| \le \frac{8^3}{12} \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Como a derivada segunda de $f(x)$ é $f''(x) = -9(6x-5)^{-3/2} \longrightarrow$

x	$f''(x)$	$\|f''(x)\|$
1	-9	9
2	-0.48298	0.482977
3	-0.18601	0.186006
4	-0.10434	0.104335
5	-0.0636	0.0636
6	-0.04607	0.046072
7	-0.02999	0.029994
8	-0.01596	0.015959
9	-0.01312	0.01312

O valor máximo de $|f''(x)| = 9$ ocorre quando $x=1$.

logo

$$|E_T| \le \frac{8^3}{12}\times 9 = 384$$

Erro muito grande!!

Exercício 1
Calcule a valor numérico das integrais abaixo pelo método do trapézio e estime o erro do método:

a) $\int_5^{10} x^2 - e^x dx$

b) $\int_{\pi/5}^{\pi/3} senx^2 dx$

Resp: $I_T \approx -55125$; $|E_T| \le 339421$

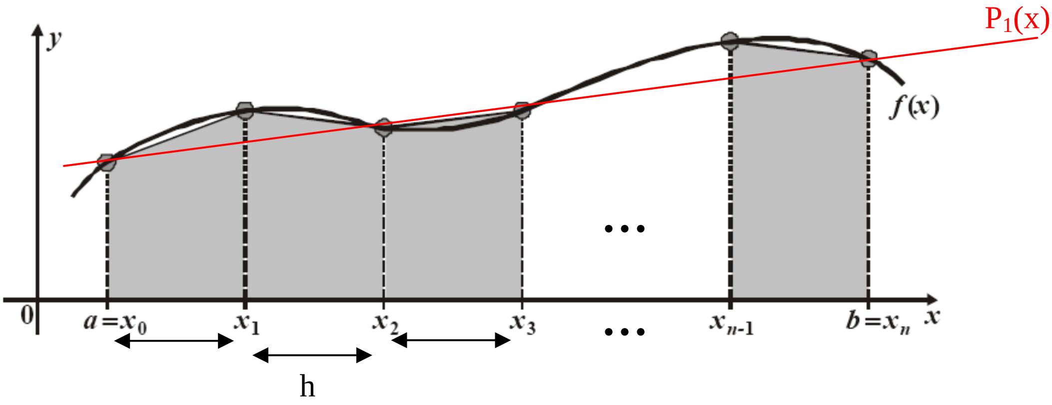
Resp: $I_T=$; $|E_T| \le$

ALGORITMO

```
Algoritmo Integração Método do Trapézio
Dados iniciais: f(x), a, b, m (função, limite inferior e superior, nr de passos)
h=(b-a)/m;
f='f(x)';
I1=0;
Para j=1 até m+1 Faça
   i=j-1;
   Se (i == 0) | (i == m) Então
     c=1;
   Senão
     c=2;
   Fim
   x=a+i*h;
   y=eval(f);
   I1=I1+c*y;
Fim
IR1=(h/2)*(I1);
Mostrar IR1;
```

2.1 Regra do trapézio repetida

A regra do trapézio é uma aproximação um pouco grosseira para o valor da integral o que pode ser verificado tanto graficamente quanto pela expressão do erro. Contudo, se aplicarmos dentro de um certo intervalo [a,b] a regra do trapézio repetidas vezes a aproximação será melhor conforme podemos observar na figura abaixo.



Dividindo o intervalo [a,b] em subdivisões iguais de largura $\boldsymbol{h = x_{i+1} - x_i}$, i = 0, 1, 2, 3, ...n

ou ainda, $h = \frac{b-a}{n}$, com n sendo o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$.

Os valores de cada um dos pontos x_i das subdivisões podem ser obtidas a partir da expressão:

$$x_i = x_0 + i \times h$$

Dessa forma podemos escrever a integral de f(x) como sendo a soma das áreas dos n trapézios pequenos contidos dentro do intervalo [a,b] como é mostrado na figura acima.

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n \text{ tal que } A_i = \text{área do trapézio } i \text{, com } i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$A_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Logo, o valor numérico da integral calculada segundo a regra do trapézio repetida será:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = I_{TR}}$$

Estimativa para o erro na regra do trapézio repetida será:

$$\boxed{|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

n sendo o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$

Comparando com a regra do trapézio!

$$\boxed{|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

$$E_{TR} = \frac{E_T}{n^2}$$

Se quisermos saber quantas subdivisões são necessárias para atingir um certa precisão dada, ou seja, um certo valor de erro, fazemos o seguinte cálculo:

$$\boxed{n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12|E_{TR}|}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}}$$

Exemplo 3

A) Calcule o valor numérico da integral do exemplo 1, $\int_1^7 \frac{1}{x^2}dx$, usando a regra do trapézio repetida considerando 6 subdivisões.

B) Calcule, em seguida, uma estimativa para o erro usando a regra do trapézio repetida.

C) Quantas subdivisões deveríamos fazer para que o erro neste processo fosse menor do que 0,001 = 10^{-3}?

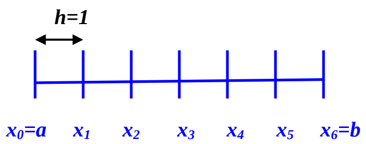
Solução:

Inicialmente calculamos a largura de cada subdivisão, ou seja, o valor de $h = \frac{b-a}{n} = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Agora encontramos o valor de cada subdivisão.

A fórmula geral para encontrar o valor de cada subdivisão é $\boxed{x_i = x_{i-1} + h = x_0 + i\,h}$

Nesse caso temos 6 subdivisões igualmente espaçados por *h*.



$x_0 = 1;\ x_1=2;\ x_2=3;\ x_3=4;\ x_4=5;\ x_5=6;\ x_6=7$

O valor numérico da integral calculada segundo a regra do trapézio repetida será:

$$I_{TR} = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{x_0^{\,2}}+\frac{1}{x_6^{\,2}}+2\left(\frac{1}{x_1^{\,2}}+\frac{1}{x_2^{\,2}}+\frac{1}{x_3^{\,2}}+\frac{1}{x_4^{\,2}}+\frac{1}{x_5^{\,2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{7^2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\right)\right] = 1{,}00159$$

Para estimarmos o erro do processo temos que calcular o valor maximo de $|f''(x)|$ dentro do intervalo [a,b]. Como $f(x)=1/x^2 = x^{-2} \rightarrow f'(x)=-2x^{-3} \rightarrow f''(x)=6x^{-4} \rightarrow |f''(x)|=6x^{-4}$

Jogado valores de x dentro do intervalo [a,b] para $|f''(x)|$ encontramos o valor máximo igual a 6 (ver tabela ao lado)

x	*|f''(x)|*
1	6
2	0.375
3	0.074074
4	0.023438
5	0.0096
6	0.00463

Dessa forma o erro nesse caso será:

$$|E_{TR}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \frac{(7-1)^3}{12\times 6^2}\times 6 = 3$$

O número de subdivisões para que o erro fosse menor do que 0,001 = 10^{-3} pode ser obtido por:

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12|E_{TR}|}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|} = \sqrt{\frac{(7-1)^3}{12\times 10^{-3}}\times 6} = 328.63 \longrightarrow \mathbf{n=329}$$

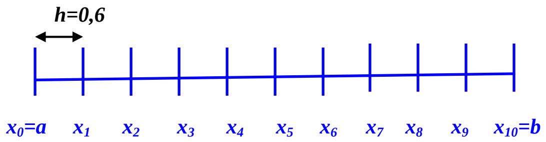
Lembre que n é um numero inteiro!

Exemplo 4
A) Calcule o valor numérico da integral do exemplo 1, $\int_1^7 \frac{1}{x^2}dx$, usando a regra do trapézio repetida considerando 10 subdivisões.
B) Calcule, em seguida, uma estimativa para o erro usando a regra do trapézio repetida.

Solução:
Nesse caso temos que n=10.
Inicialmente calculamos a largura de cada subdivisão, ou seja, o valor de $h = \frac{b-a}{n} = \frac{7-1}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

Agora encontramos o valor de cada subdivisão.

A fórmula geral para encontrar o valor de cada subdivisão é $\boxed{x_i = x_{i-1} + h = x_0 + i\,h}$
Nesse caso temos 10 subdivisões igualmente espaçados por *h*.



$x_0 = 1$; $x_1=1{,}6$; $x_2=2{,}2$; $x_3=2{,}8$; $x_4=3{,}4$; $x_5=4$; $x_6=4{,}6$; $x_7=5{,}2$; $x_8=5{,}8$; $x_9=6{,}4$; $x_{10}=7$

O valor numérico da integral calculada segundo a regra do trapézio repetida será:

$$I_{TR} = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_{10}^2}+2\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}+\frac{1}{x_6^2}+\frac{1}{x_7^2}+\frac{1}{x_8^2}+\frac{1}{x_9^2}\right)\right]$$

$$= 0{,}3\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{7^2}+2\left(\frac{1}{1{,}6^2}+\frac{1}{2{,}2^2}+\frac{1}{2{,}8^2}+\frac{1}{3{,}4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4{,}6^2}+\frac{1}{5{,}2^2}+\frac{1}{5{,}8^2}+\frac{1}{6{,}4^2}\right)\right] = 0{,}9134$$

Para estimarmos o erro do processo temos que calcular o valor máximo de $|f''(x)|$ dentro do intervalo [a,b]. Como $f(x)=1/x^2 = x^{-2} \rightarrow f'(x)=-2x^{-3} \rightarrow f''(x)=6x^{-4} \rightarrow |f''(x)|=6x^{-4}$

Jogado valores de x dentro do intervalo [a,b] para $|f''(x)|$ encontramos o valor máximo igual a 6 (ver tabela ao lado)

x	*|f''(x)|*
1	6
2	0.375
3	0.074074
4	0.023438
5	0.0096
6	0.00463

Dessa forma o erro nesse caso será:

$$|E_{TR}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \frac{(7-1)^3}{12\times 10^2}\times 6 = 1{,}08$$

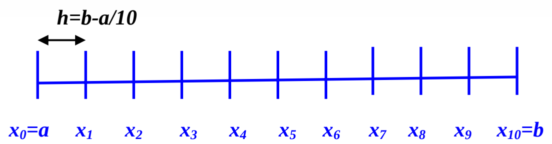
Exemplo 4

Seja $I = \int_0^1 e^x \, dx$

a) Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra dos Trapézios repetida. Estime o erro cometido.

b) Qual o número mínimo de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Solução:



(*a*) Os pontos $x_i = 0.1i$, $i = 0, 1, ..., 10$ dividirão o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos com $h = 0.1$. Aplicando a regra dos Trapézios repetida, teremos

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx \frac{0.1}{2}\Big(\underbrace{e^0}_{f(x_0)} + \underbrace{2e^{0.1} + 2e^{0.2} + \ldots + 2e^{0.7} + 2e^{0.8} + 2e^{0.9}}_{2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)} + \underbrace{e}_{f(x_n)}\Big) = 1.719713$$

Calculando a estimativa para o erro, teremos: $|E_{TR}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{(1-0)^3}{12 \times 10^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Como a derivada segunda de *f(x)* é $f''(x) = e^x$ →

x	$\lvert f''(x) \rvert$
0	1
0.1	1.105171
0.2	1.221403
0.3	1.349859
0.4	1.491825
0.5	1.648721
0.6	1.822119
0.7	2.013753
0.8	2.225541
0.9	2.459603
1	2.718282

O valor máximo de $|f''(x)| = 2.7182$ ocorre quando $x=1$.

logo

$$|E_{TR}| \le \frac{1}{1200} \times 2.7182 \approx 0.00227$$ Erro bem pequeno!!

b) $$|E_{TR}| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = 10^{-3}$$

Logo

$$n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12 \times E_{TR}} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|} = \sqrt{\frac{(1-0)^3}{12 \times 10^{-3}} 2.7182} = 15.0504706$$

Lembrando que *n* é um numero inteiro, devemos ter n = 16 subintervalos dentro de [0,1] para que o erro seja menor que 10^{-3}.

Exercício 2

A) Calcular $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\, dx$ empregando o método dos trapézios com 8 repetições.

B) Determine a estimativa para o erro (E_{TR}) nesse caso. **Dica:** $f''(x) = -9(6x-5)^{-3/2}$

C) Quantas subdivisões devemos ter para que o erro seja menor do que 0,0001 = 10^{-4}?

Resp: I_{TR}= 37,8181; $E_{TR} \leq 6$; n=;

Exercício 3

A) Calcular $\int_2^8 5x^3 + \frac{1}{x} dx$: empregando o método dos trapézios com 6 repetições.

B) Determine a estimativa para o erro (E_{TR}) nesse caso.

C) Quantas subdivisões devemos ter para que o erro seja menor do que 0,00001 = 10^{-5}?

Resp: I_{TR}= 5176,40; $E_{TR} \leq 120{,}001$; n=

Exercício 5

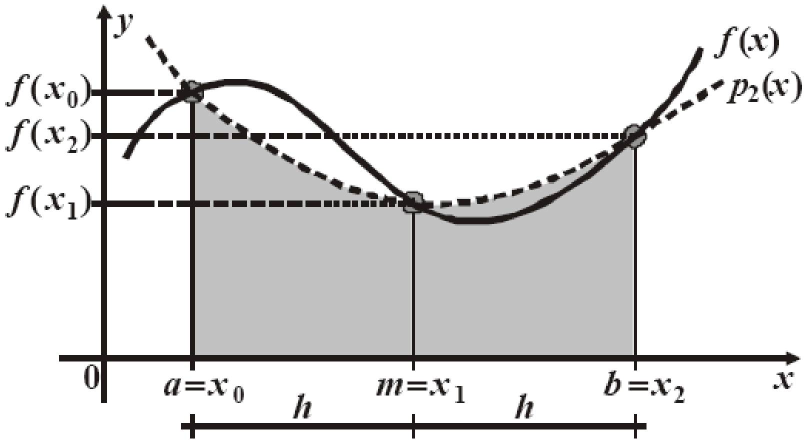
A) Calcular $\int_{-3}^{8} (senx + x)dx$ empregando o método dos trapézios com 5 repetições.

B) Determine a estimativa para o erro (E_{TR}) nesse caso. **Dica considere os valores de *sen(x)* em radianos!**

C) Quantas subdivisões devemos ter para que o erro seja menor do que 0,000001 = 10^{-6}?

Resp: I_{TR}= 27,027 ; $E_{TR} \leq$; n=

2.2. Regra 1/3 de Simpson



Consideremos agora que se queira aproximar f(x) por um **polinômio interpolador de ordem 2 (parábola)**, $p_2(x)$, que é dado pela formula de Lagrange;

$$p_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$\text{tal que } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \text{ com } i = 0,1,2.$$

temos ainda que:

$$x_0 = a, \; x_1 = m \text{ e } x_2 = b$$

$$m = x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$x_0 - x_1 = -h, \quad x_0 - x_2 = -2h,$$

$$x_1 - x_0 = h, \quad x_1 - x_2 = -h,$$

$$x_2 - x_0 = 2h, \quad x_2 - x_1 = h.$$

Logo,

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx$$

$$= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)dx + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)dx$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Logo, o valor numérico da integral calculada segundo a regra 1/3 de Simpson será:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] = I_S}$$

Estimativa para o erro na regra 1/3 de Simpson:

$$\boxed{|E_S| = \frac{h^5}{90} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^4(x)|}$$

Considerando $h = \dfrac{b-a}{2} \Rightarrow h^5 = \dfrac{(b-a)^5}{32}$, tem-se:

$$\boxed{|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^4(x)|}.$$

Exemplo 5

Calcular $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{x^2}dx$ utilizando a regra 1/3 de Simpson e dar uma estimativa para o erro utilizando essa técnica de integração numérica.

Solução:

Temos nesse caso 3 pontos a considerar dentro do intervalo [a,b]=[1,7], são eles: $x_0=1$ e $x_1=(1+7)/2=4$ e $x_2=7$

Como agora temos $n=2$ subdivisões dentro do intervalo [a,b] teremos $h= (b-a)/2 = (7-1)/2 = 3$

O valor numérico da integral será:

$$I_s = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] = \frac{3}{3}\left[\frac{1}{1^2}+4\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}\right] = 1.27$$

Calculando a estimativa para o erro, teremos: $\left|E_S\right| \leq \dfrac{(7-1)^5}{2880} \max_{x\in[a,b]}\left|f^4(x)\right|$

Derivando $f(x)$ temos

$$f'(x) = -2x^{-3}$$
$$f''(x) = 6x^{-4}$$
$$f^3(x) = -24x^{-5}$$
$$f^4(x) = 120x^{-6} \longrightarrow$$

x	$\lvert f^4(x)\rvert$
1	120
2	1.875
3	0.164609
4	0.029297
5	0.00768
6	0.002572
7	0.00102

logo

$$\left|E_S\right| \leq \frac{6^5}{2880} \times 120 = 324$$

Erro grande!!

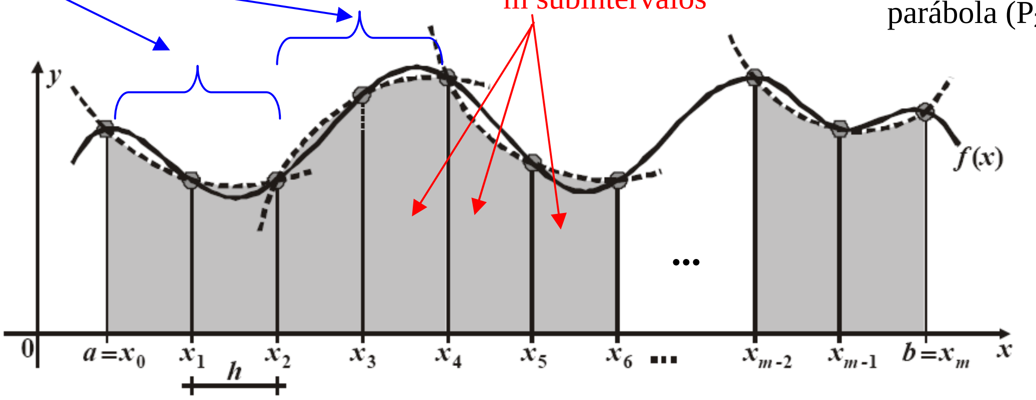
2.2. Regra 1/3 de Simpson repetida

Vamos agora repetir o procedimento anterior para *n* pares de subintervalos. Definimos o número de subintervalos pela letra *m = 2n*.

Obs. A cada par de subintervalos temos 3 pontos para ajustar uma parábola ($P_2(x)$)

n pares de subintervalos, ou seja, a metade do numero de subdivisões n=m/2

m subintervalos



Na figura, tome $h=\dfrac{b-a}{m} \Rightarrow \boxed{h=x_i-x_{i-1}}$ $(i=1,2,\ldots m)$, para $m=2n \Rightarrow \boxed{m \text{ é par}}$.

Aplica-se a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a,b]=[x_0,x_m]$.

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ são pontos igualmente espaçados.

Então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]+\frac{h}{3}[y_2+4y_3+y_4]+\ldots+\frac{h}{3}[y_{m-2}+4y_{m-1}+y_m]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_m+2(y_2+y_4+\ldots+y_{m-2})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{m-1})]$$

sera:

Valor da função nos subintervalos de índices IMPARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_m)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1})\right] = I_{SR}$$

Valor da função nas extremidades inicial e final do intervalo ou seja nos pontos a e b.

Valor da função nos subintervalos de índices PARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

Estimativa para o erro para regra 1/3 de Simpson repetida.

$$\boxed{|E_{SR}| \leq n \cdot \frac{h^5}{90} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|}$$

Considerando $h = \dfrac{b-a}{\boldsymbol{m}} \Rightarrow h^5 = \dfrac{(b-a)^5}{32n^5}$, tem-se:

$$\boxed{|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|}$$

Comparando com a regra 1/3 de Simpson!

$$\boxed{|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|}.$$

$$E_{SR} = \frac{E_S}{n^4}$$

!

***n=m/2* é a metade de subdivisões do intervalo [a,b]**

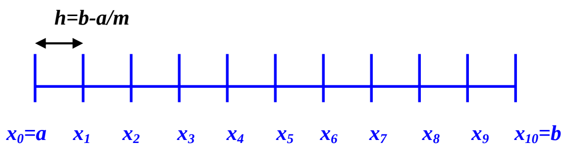
Exemplo 6

Calcular $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{x^2} dx$ utilizando a regra 1/3 de **Simpson repetida** para 10 subdivisões e dar uma estimativa para o erro utilizando essa técnica de integração numérica.

Obs.: *m* vai ser sempre um número par.

Resolução:

Temos nesse ***m=2n = 10* subdivisões** dentro o intervalo *[a,b]=[x_0,x_m]=[1,7]*, portanto, temos que considerar 11 pontos igualmente espaçados por *h=(b-a)/2n=(7-1)/10=0,6*. São eles:



$x_0 = 1$; $x_1=1{,}6$; $x_2=2{,}2$; $x_3=2{,}8$; $x_4=3{,}4$; $x_5=4$; $x_6=4{,}6$; $x_7=5{,}2$; $x_8=5{,}8$; $x_9=6{,}4$; $x_{10}=7$

O valor numérico da integral será:

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_m) + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}) \right]$$

Calculando os somatório temos:

$m = 10$ $\quad \dfrac{10}{2} - 1 = 4$

Valor da função nos subintervalos de índices PARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i}) = f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) = \frac{1}{2{,}2^2} + \frac{1}{3{,}4^2} + \frac{1}{4{,}6^2} + \frac{1}{5{,}8^2} = 0{,}3701$$

$m = 10 \rightarrow \frac{10}{2} = 5$

Valor da função nos subintervalos de índices IMPARES dentro do intervalo [a,b], excluindo as extremidades.

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}) = f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) = \frac{1}{1{,}6^2} + \frac{1}{2{,}8^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5{,}2^2} + \frac{1}{6{,}4^2} = 0{,}642$$

Logo

$$I_{SR} = \frac{0.6}{3}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{7^2} + 2 \times 0{,}701 + 4 \times 0{,}6427\right] \approx 0{,}8657$$

Calculando a estimativa para o erro, teremos: $|E_{SR}| \leq \frac{(7-1)^5}{2880 n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^4(x)|$

Derivando *f(x)* temos $f'(x) = -2x^{-3}$

$$f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f^3(x) = -24x^{-5}$$

$$f^4(x) = 120x^{-6}$$

x	$\lvert f^4(x)\rvert$
1	120
2	1.875
3	0.164609
4	0.029297
5	0.00768
6	0.002572
7	0.00102

logo

$$|E_{SR}| \leq \frac{6^5}{2880 \times 5^4} \times 120 = 0{,}5184$$

Erro pequeno!!

Exercício 6

Seja $I = \int_0^1 e^x \, dx$

a) Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra 1/3 de Simpson repetida. Estime o erro cometido.

b) Qual o número mínimo de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Resp: $\boldsymbol{I_{SR} = 1.718}$**;** $\boldsymbol{|E_{SR}| \leq 1{,}51 \times 10^{-6}}$**;** $\boldsymbol{m=2}$

Exercício proposto 1

Seja $I = \int_{8}^{13} 3xe^{2x} dx$

a) Calcule o valor de I com 8 subintervalos na regra do trapézio repetida e na regra 1/3 de Simpson repetida.

b) Qual dos dois métodos numéricos da uma estimativa para o erro menor?

c) Quantas subdivisões devemos ter, em cada uma das técnicas propostas, para que o erro no cálculo seja menor do 10^{-13}?

Exercício proposto 2

Seja a integral: $I = \int_{0}^{0.6} \frac{1}{1+x} dx$

a) Calcule pela regra dos trapézios e pela regra dos trapézios repetida com 4 subintervalos seu valor aproximado:

b) Quantos subintervalos devemos ter na regra dos trapézios repetida para obtermos uma precisão de calculo melhor que $\varepsilon \sim 10^{-6}$?

Exercício proposto 3

Seja a integral: $I = \int_{0}^{0.6} e^{5x} + x^2 dx$

a) Calcule seu valor aproximado pela regra 1/3 de Simpson repetida usando 3 e 6 subintervalos. Compare os valores encontrados.

b) Quantos subintervalos devemos ter se quisermos obtermos uma precisão de cálculo melhor que $\varepsilon \sim 10^{-9}$ utilizando a regra 1/3 de Simpson repetida.